

金融システム演習「クレジット・モデリング」

平成 26 年度冬学期 期末試験

高田 勝己

2015 年 2 月 6 日

注意事項

- 最終的な答えだけでなく、途中経過も詳しく書いてください。中間点を与えます。

1. (リスク中立測度と実測度の生存確率) (35 点)

ある企業が時点 T まで生存している (倒産していない) 事象 $\{\tau > T\}$ の確率を、リスク中立測度 \mathbf{Q} であらわしたものを $\mathbf{Q}(\tau > T)$ 、と実測度 \mathbf{P} では $\mathbf{P}(\tau > T)$ とする。倒産強度と生存確率の関係は

$$\mathbf{Q}(\tau > T) = E^{\mathbf{Q}} \left[e^{-\int_0^T \lambda_u^{\mathbf{Q}} du} \right]$$

及び

$$\mathbf{P}(\tau > T) = E^{\mathbf{P}} \left[e^{-\int_0^T \lambda_u^{\mathbf{P}} du} \right]$$

である。

倒産リスクのある企業が発行した、満期が T で回収額のない割引債 $B(\cdot; T)$ は時点 0 で

$$B(0; T) = E^{\mathbf{Q}} \left[e^{-\int_0^T (r_u + \lambda_u^{\mathbf{Q}}) du} \right]$$

とかける。

(ア) 金利と倒産強度が独立なら、

$$B(0; T) = D(0; T) \mathbf{Q}(\tau > T)$$

とかける。このもとで、マーケットで、満期が T であるリスクフリーな割引債 $D(0; T)$ とリスクな割引債 $B(0; T)$ が現在 ($t = 0$ で) トレードされていると、リスク中立での生存確率は

$$\mathbf{Q}(\tau > T) = B(0; T) / D(0; T) \tag{1}$$

と計算される。金利と倒産強度に負の相関があるとする (解釈としては、経済が悪くなると金利が下がり倒産がふえる)。このとき、 $\mathbf{Q}(\tau > T)$ は、相関がない場合の生存確率 $B(0; T) / D(0; T)$ とどちらが大きいか? ヒント:

$$Cov^{\mathbf{Q}} \left(e^{-\int_0^T r_u du}, e^{-\int_0^T \lambda_u^{\mathbf{Q}} du} \right)$$

を考えよ。

(イ) 同じ企業が参照される満期が T の CDS (Credit Default Swap) レートが s としてトレードされている。プレミアム (クーポン) s が連続で払われると仮定して、リスクフリーな short rate を r_t , リスク中立の倒産強度を λ_t^Q 、元本に対する一定な回収額を R としたとき、 s をリスク中立の期待値 E^Q を使って表現せよ。

ヒント: premium leg と protection leg の価値を等しくする年率 premium が s である。

(エ) 倒産時刻 τ のリスク中立の確率密度関数 (PDF) $\varphi_\tau(t)$ は

$$\varphi_\tau(t) = E^Q \left[e^{-\int_0^t \lambda_u^Q du} \lambda_t^Q \right]$$

とかける。これを証明せよ。

(オ) 時点 0 における時点 t のリスク中立での倒産ハザードレート (フォワード倒産強度) を $h^Q(0; t)$ とすると、

$$Q(\tau > T) = e^{-\int_0^T h^Q(0; u) du}$$

である。 $E^Q(\lambda_t^Q)$ と $h^Q(0; t)$ の大小関係は?

(カ) 金利をゼロとする。社債の発行体が、満期 T までに倒産するとその時に元本 1 に対する既知である一定の回収率 R が、満期 T まで生存すれば時点 T で元本 1 が満額返ってくる証券の現在価値 V_0 をリスク中立の生存確率 $Q(\tau > T)$ と回収率 R で表せ。

(キ) V_0 を実測度での生存確率 $P(\tau > T)$ と R で表現するとどうなるか? ヒント: 実測度ではプライスは平均ではかけない。平均からの乖離 (リスクプレミアム) を適当に $\alpha (> 0)$ とおけ。

(ク) (カ) と (キ) から、 $Q(\tau > T)$ と $P(\tau > T)$ の大小関係をしめせ。

(ケ) どのようなときに、リスク中立の生存確率 (または倒産確率) がつかわれ、どのようなときに実測度の生存確率 (または倒産確率) がつかわれるのか説明せよ。また、これらの推定方法を示せ。

2. (ファクターモデル) (25 点)

ある同じ属性をもっている複数の企業を考える。その中の企業 i の状態変数 Z_i を 1 ファクターモデルでかくと、

$$Z_i = \sqrt{\rho} S + \sqrt{1 - \rho} \varepsilon_i \quad (2)$$

ここで、 $\rho > 0$, $S \sim N(0, 1)$ は systematic factor である。 $\varepsilon_i \sim N(0, 1)$ は S とは独立な企業 i の idiosyncratic factor であり、 $i \neq j$ に対して、 $\text{Corr}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ である。

(ア) $Z_i \sim N(0, 1)$ であることを示せ。

(イ) $\text{Corr}(Z_i, Z_j) = \rho$, $i \neq j$ を示せ。

(ウ) 企業 i の時点 T までの倒産を Z_i の閾値 $H_i(T)$ で

$$\{\tau_i \leq T\} = \{Z_i \leq H_i(T)\}$$

とし、時点 T までの企業 i の実測度での倒産確率を $PD(T)$ とすれば、 $H_i(T)$ はどのようにかけるか? 標準正規分布関数を $\Phi(\cdot)$ とする。

(エ) Systematic factor が $S = s$ のもとでの条件付き倒産確率 $PD(T | S = s)$ を計算せよ。

(オ) Stressed PD (PD にストレスをかけたもの) を $PD(T | S = \Phi^{-1}(0.001))$ と定義する。この意味するところはなにか?

(カ) Basel 2 では、あるカウンターパーティーの倒産リスクからくる必要資本額 K を次の式^{*1}であらわしている。

$$K = (1 - R) * \left(\Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(PD(1yr)) + \sqrt{\rho} \Phi^{-1}(0.999)}{\sqrt{1 - \rho}} \right) - PD(1yr) \right) * EAD \quad (3)$$

ここで、 EAD (Exposure at default): そのカウンターパーティーが倒産したときのエクスポージャー、 R は回収率で、 $1 - R$ は倒産時の EAD に対する損失率を表している。(3) の必要資本額の計算式の意味を説明せよ。

3. (倒産時刻のシュミレーション) (20点)

Credit derivatives のプライシングでは、リスク中立での倒産時刻をモンテカルロ法でシュミレーションして計算する場合がある。

(ア) 時点 0 での時点 T までの生存確率を

$$Q(0; T) = \mathbf{Q}(\tau > T)$$

とかくとき、リスク中立の倒産時刻 τ は

$$Q(0; \tau) = U$$

を満たす τ である。なぜか説明せよ。ここで、 U は $[0, 1]$ の一様分布に従う確率変数。

(イ) 倒産強度が一定な λ である場合、 τ を U を使ってかくとどうなるか？

(ウ) 2 企業の生存確率が CDS マーケットから $Q_1(0; T)$ と $Q_2(0; T)$ とわかっているとす。2 企業の時点 T までのリスク中立での同時倒産確率 $\mathbf{Q}(\{\tau_1 \leq T\} \cap \{\tau_2 \leq T\})$ を Gaussian Copula でかけ。ヒント: 2 変量標準正規分布は $\Phi_2(x, y; \rho)$ であり、 x 及び y を $Q_1(0; T)$ と $Q_2(0; T)$ をつかってかけ。

(エ) 今度は、リスク中立で (2) の 1 ファクターモデル ($i=1, 2$) を仮定する。このモデルが Gaussian Copula となることを示せ。

(オ) (ウ) から 2 企業の同時倒産確率は Gaussian Copula を使うと解析的に求まるが、ここでは (エ) の結果をつかい、(2) から同時倒産確率をモンテカルロ法で 2 企業の倒産時刻 τ_1 と τ_2 をシュミレーションして求めることを考える。この手順を示せ。

4. (シンセティック CDO) (20点)

(ア) Senior tranche のプロテクションの売り方は”Short correlation”、Equity tranche のプロテクションの売り方は”Long correlation”であると言われる。その理由を説明せよ。

(イ) 各トランシェをプライシングする場合、1 ファクター正規コピュラを用いることがある。そこで用いられる相関係数として、講義では Compound correlation と Base correlation を説明した。再度それぞれを説明して、Compound correlation の欠点を述べ、それがいかに Base correlation で克服されたかを述べよ。

以上

^{*1} 実際には、満期アジャストメントの項も入る。