Ross's Recovery Theorem
第 1 回：無裁定プライシング と均衡理論

高田勝己*

2013 年 2 月 6 日

1　無裁定プライシングと Recovery Theorem

無裁定プライシング（Arbitrage free pricing) には実世界の確率は必要ない。実世界の確率の割り当てがどうであろうとも、無裁定による価格はかわらない。実際、デリバティブの価格付は実世界の確率とは無関係に行われる。

一方、Ross は、マーケットの証券価格だけから、実世界の確率の割り当てがわかるという Recovery Theorem を 2011 年にワーキングペーパーで明らかにした。これは一見すると驚きである。このメカニズムと謎を解き明かそう。

2　2 つのプライシング理論（デリバティブ理論 vs アカデミック理論）

時点 T にペイオフがある証券 V を考える。

2.1　リスク中立測度 Q でのプライシング

$$V_0 = E^Q\left[e^{-\int_0^T r_u du} V_T\right] \tag{1}$$

これは無裁定の条件だけから導け、嗜好や効用 (preference) とは無関係にきまる。実務、とくに派生証券のプライシングに用いられる。

2.2　実測度 P でのプライシング

(1) より

$$V_0 = E\left[\varphi_T V_T\right] \tag{2}$$

ここで、

$$\varphi_T = e^{-\int_0^T r_u du}\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \tag{3}$$

* ktakada@divainvest.jp

であり、$\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}$ はリスク中立測度 $\mathbf{Q}$ の実測度 $\mathbf{P}$ に対する Radon-Nikodym derivative。さらに、状態価格 (State price) の分布関数を $\mathbf{\Pi}$ とすれば、

$$d\mathbf{\Pi} = e^{-\int_0^T r_u du} d\mathbf{Q} \tag{4}$$

(3) は

$$\varphi_T = \frac{d\mathbf{\Pi}}{d\mathbf{P}} \tag{5}$$

となる。(2) における φ_T を Pricing kernel(または Stochastic discount factor、State-price deflator、State-price density とも) という。(5) よりこれは、状態価格/実測度の確率密度であることがわかる。(5) を変形して

$$dP = \frac{d\mathbf{\Pi}}{\varphi_T}$$

Recovery theorem とは、状態価格 $d\mathbf{\Pi}$、Pricing kernelφ_T が分かれば、実測度での推移確率 $d\mathbf{P}$ がわかるというもの。状態価格はマーケット、特に派生証券価格から計算できる（デリバティブ理論)。Pricing kernel の計算は通常、アカデミックの領域に入り、均衡理論を用いてなされ、嗜好や効用 (preference) に依存する（アカデミック理論)。この意味で、Recovery Theoem はデリバティブ理論とアカデミック理論の融合と考えられる。Peter Carr は嗜好や効用 (preference) に依存しない Numaire portfolio をつかった Pricing kernel の計算を提唱した。

3 消費ベースの資産価格付けモデル (Consumption-based asset pricing models)

3.1 セットアップ

- 時間を離散的にして考える。$t = 0, 1, 2, \cdots T$. 状態は連続。
- １つの消費財を考える。
- N つの証券を考える。$i = 1, 2, \cdots, N$.　i 番目の証券は時点 t に配当 D_t^i を支払う

3.2 効用関数

確率的に変動する消費 c にたいする効用関数 $u(c)$ を考える。

$$\begin{cases} u'(c) > 0: & \text{more is preferred to less} \\ u''(c) < 0: & \text{Risk averse} \end{cases} \tag{6}$$

効用関数は大小をあらわすもので、1 次変換では一意にきまらない。よって、$u''(c)$ だけでリスク回避度を表せない。

絶対リスク回避度 (Constant risk averson) とは

$$A(c) \equiv \frac{-u''(c)}{u'(c)}$$

で、

$$u(c) = 1 - e^{-\alpha c}$$

が絶対リスク回避度が一定の効用関数の例である。

相対リスク回避度（Relative risk aversion）とは

$$R(c) \equiv \frac{-cu''(c)}{u'(c)}$$

で

$$u(c) = \frac{c^{1-\rho}}{1-\rho} \tag{7}$$

が相対リスク回避度が一定な効用関数の代表例である。

(6) より、$u(c)$ は Concave 関数である[*1]。

$C = [c_0, c_1, c_2 \cdots, c_T]^T$ を各時点での代表的消費者 (Representative consumer) の消費量ベクトル。彼の時点 t における効用関数を $U_t(\cdot)$ とすれば、各時点で消費から得られる効用は $U_t(C)$ で表される。効用関数は、

$$\begin{cases} \frac{\partial U_t}{\partial c_\tau} > 0: & \text{more is preferred to less} \\ \frac{\partial U_t}{\partial c_\tau \partial c_{\tau'}} < 0: & \text{Risk averse} \end{cases} \tag{8}$$

効用関数は、time-separable で von Neumann-Margenstern の効用関数を仮定すると

$$U_t(C) = \sum_{\tau=t}^{T} u_t^\tau(c_\tau), \ t = 0, 1, 2, \cdots T$$

ここで、$u_t^\tau(\cdot)$ は時間には依存するが、状態に依存しない。例えば、$u_t^\tau(c) = e^{-\rho(\tau-t)}v(c)$.(8) は

$$\begin{cases} \frac{\partial u_t^\tau}{\partial c} > 0 \\ \frac{\partial^2 u_t^\tau}{\partial c^2} < 0 \end{cases} \tag{9}$$

となる。

また、均衡状態では消費者はすべて証券を所有しており、時点 t にそこからの総配当を消費に回す。すなわち、

$$c_t = \sum_{i=1}^{N} D_t^i$$

時点 t での期待効用 (Expected utility) は

$$E_t\left(U_t(C)\right) = E_t\left(\sum_{\tau=t}^{T} u_t^\tau \left(\sum_{i=1}^{N} D_\tau^i\right)\right)$$

となる。

[*1] デリバティブ実務では、Concave という言葉はでてこない。その代わり、Convex は Convexity 調整などとしてよく出てくる。デリバティブ実務では、Concave も Convex も区別せず Convex と言われるのである。

3.3 効用最大化問題と Fundamental Valuation Equation

均衡状態では、i 番目の証券は 1) 消費者はすべての証券を持っており、限界的に α 分の i 番目の証券を購入または売却しても期待効用は変わらない。つまり、q^i を i 番目の証券価格とすれば、

$$f(\alpha) \equiv E_t \left[u^t \left(c_t - \alpha q_t^i \right) + \sum_{\tau=t}^{T} u^\tau \left(c_\tau + \alpha D_\tau^i \right) \right]$$

が $\alpha = 0$ で最大値をとる。$f(\alpha)$ は α に関して strictly concave なので、一階の条件 (First-order condition) だけで十分で、これは

$$\left. \frac{\partial f(\alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = 0 \tag{10}$$

$\frac{\partial f(\alpha)}{\partial \alpha}$ を計算してみると、

$$\frac{\partial f(\alpha)}{\partial \alpha} = -q_t^i u_c^t \left(c_t - \alpha q_t^i \right) + E_t \left[\sum_{\tau=t+1}^{T} D_\tau^i u_c^\tau \left(c_\tau + \alpha D_\tau^i \right) \right]$$

よって、(10) の 1 階の条件は

$$-q_t^i u_c^t \left(c_t \right) + E_t \left[\sum_{\tau=t+1}^{T} D_\tau^i u_c^\tau \left(c_\tau \right) \right] = 0$$

これより、Fundamental valuation equation

$$q_t^i = E_t \left[\sum_{\tau=t+1}^{T} \frac{u_c^\tau \left(c_\tau \right)}{u_c^t \left(c_t \right)} D_\tau^i \right] \tag{11}$$

がいえる。ここで、$u_c \left(c \right) \equiv \frac{du(c)}{dc}$ である。

$t = 0$ と $t = T$ の 2 期間だけを考えると、

$$V_0 = E \left[\frac{u_c^T \left(c_T \right)}{u_c^0 \left(c_0 \right)} V_T \right] \tag{12}$$

となり、(2) と比較するとプライシングカーネル φ_T は

$$\varphi_T = \frac{u_c^T \left(c_T \right)}{u_c^0 \left(c_0 \right)}$$

で与えられる。プライシングカーネルは、現在と将来の消費の限界代替率 (Marginal rate of substitution between future and current comsumption) となることがわかる。

3.4 リターンベースの Fundamental valuation equation

アカデミックでは、プライスよりリターンで考えることの方が多い。i 番目の企業の株式の時間 $t-1$ から時点 t までのリアライズしたリターンを

$$R_t^i \equiv \frac{q_t^i + D_t^i}{q_{t-1}^i}$$

と定義する。(11) より

$$q_{t-1}^{i}=E_{t-1}\left[\sum_{\tau=t}^{T}\frac{u_{c}^{\tau}\left(c_{\tau}\right)}{u_{c}^{t-1}\left(c_{t-1}\right)}D_{\tau}^{i}\right] \tag{13}$$

$$=E_{t-1}\left[\frac{u_{c}^{t}\left(c_{t}\right)}{u_{c}^{t-1}\left(c_{t-1}\right)}\left(D_{t}^{i}+\sum_{\tau=t+1}^{T}\frac{u_{c}^{\tau}\left(c_{\tau}\right)}{u_{c}^{t}\left(c_{t}\right)}D_{\tau}^{i}\right)\right] \tag{14}$$

$$=E_{t-1}\left[\frac{u_{c}^{t}\left(c_{t}\right)}{u_{c}^{t-1}\left(c_{t-1}\right)}\left(D_{t}^{i}+E_{t}\left[\sum_{\tau=t+1}^{T}\frac{u_{c}^{\tau}\left(c_{\tau}\right)}{u_{c}^{t}\left(c_{t}\right)}D_{\tau}^{i}\right]\right)\right] \tag{15}$$

$$=E_{t-1}\left[\frac{u_{c}^{t}\left(c_{t}\right)}{u_{c}^{t-1}\left(c_{t-1}\right)}\left(D_{t}^{i}+q_{t}^{i}\right)\right] \tag{16}$$

これより、

$$E_{t}\left[\frac{u_{c}^{t+1}\left(c_{t+1}\right)}{u_{c}^{t}\left(c_{t}\right)}R_{t+1}^{i}\right]=1 \tag{17}$$

余談ではあるが、米国ビジネススクールの金融専攻の Ph.D の学生は、”E of mR is equal to one”

$$E(mR)=1$$

は耳にタコができるぐらい教え込まれる基本的な式である。もちろん、ここでの期待値は実世界のもので、これはデリバティブ理論にはでてこない。

Riskless な資産の 1+ 金利も (17) をみたす。これを R_{t+1}^{0} とすれば、

$$E_{t}\left[\frac{u_{c}^{t+1}\left(c_{t+1}\right)}{u_{c}^{t}\left(c_{t}\right)}R_{t+1}^{0}\right]=1 \tag{18}$$

i 番目の株式の超過リターンは (17) と (18) から、$r_{t}^{i}\equiv R_{t}^{i}-R_{t}^{0}$ とすれば

$$E_{t}\left[u_{c}^{t+1}\left(c_{t+1}\right)r_{t+1}^{i}\right]=0 \tag{19}$$

以上示した (11)、(17)、(19) は条件付きのバージョンである。例えば、(19) で Unconditional な期待値をとると

$$E\left[u_{c}^{t+1}\left(c_{t+1}\right)r_{t+1}^{i}\right]=0 \tag{20}$$

となり、これが条件なしバージョンである。

3.5 消費ベースの資産価格付けモデル

3.5.1 効用関数を仮定

$u^{t+1}\left(c_{t+1}\right)=A_{t}c_{t+1}-B_{t}\frac{c_{t+1}^{2}}{2}$ と効用関数を仮定すると、$u_{c}^{t+1}\left(c_{t+1}\right)=A_{t}-B_{t}c_{t+1}$ から、(20) は

$$E_{t}\left[\left(A_{t}-B_{t}c_{t+1}\right)r_{t+1}^{i}\right]=0 \tag{21}$$

これは

$$E_{t}\left[r_{t+1}^{i}\right]=\frac{B_{t}}{A_{t}-B_{t}E_{t}\left[c_{t+1}\right]}cov_{t}(r_{t+1}^{i},c_{t+1})$$

となり、期待超過リターンは消費との共分散に比例する。$\beta_{t}=\frac{cov_{t}(r_{t+1}^{i},c_{t+1})}{var_{t}(c_{t+1})}$ とすれば、

$$E_{t}\left[r_{t+1}^{i}\right]=\frac{B_{t}var_{t}(c_{t+1})}{A_{t}-B_{t}E_{t}\left[c_{t+1}\right]}\beta_{t}$$

3.5.2 超過リターンと消費が正規分布に従うと仮定

Stain's lemma を使う[*2]。Stain's lemma とは、(x, y) が 2 変量正規分布に従うとき、$g(y)$ がいたるところで微分可能で $E|g'(y)| < \infty$ ならば、

$$cov(x, g(y)) = E(g'(y))cov(x, y)$$

が成り立つ[*3]。

まづ、Stain's lemma を使って

$$cov_t\left(r^i_{t+1}, u^{t+1}_c(c_{t+1})\right) = E_t(u^{t+1}_{cc}(c_{t+1}))cov_t\left(r^i_{t+1}, c_{t+1}\right)$$

一方、cov の定義より、

$$cov_t\left(r^i_{t+1}, u^{t+1}_c(c_{t+1})\right) = E_t(r^i_{t+1}u^{t+1}_c(c_{t+1})) - E_t(r^i_{t+1})E_t(u^{t+1}_c(c_{t+1}))$$

以上より、

$$E_t(r^i_{t+1}u^{t+1}_c(c_{t+1})) - E_t(r^i_{t+1})E_t(u^{t+1}_c(c_{t+1})) = E_t(u^{t+1}_{cc}(c_{t+1}))cov_t\left(r^i_{t+1}, c_{t+1}\right) \tag{22}$$

(20) を使って、(22) を $E_t(r^i_{t+1})$ について解くと

$$E_t(r^i_{t+1}) = -\frac{E_t(u^{t+1}_{cc}(c_{t+1}))}{E_t(u^{t+1}_c(c_{t+1}))}cov_t\left(r^i_{t+1}, c_{t+1}\right) \tag{23}$$

この条件なしバージョン (Unconditional version) は

$$E(r^i_{t+1}) = -\frac{E(u^{t+1}_{cc}(c_{t+1}))}{E(u^{t+1}_c(c_{t+1}))}cov\left(r^i_{t+1}, c_{t+1}\right) \tag{24}$$

となる。

3.6 CAPM (Capital Asset Pricing Model)

CAPM は 2 期間モデルで $t = 1$ で証券は満期を迎え、代表的消費者は総富 (Aggregate wealth)W_1 をすべて消費する。よって、$c_1 = \sum_{i=1}^N D^i_1 \equiv W_1$

すると、(19) は

$$E\left[u^1_w(W_1)\, r^i_1\right] = 0 \tag{25}$$

となり、資産の超過リターンが総富の限界効用と関連づけられる。

もし、証券の満期ペイオフが多変量正規分布に従うなら、富の総額と超過リターンは 2 変量正規分布に従う。Stain's lemma より

$$E(r^i_1) = -\frac{E(u^1_{ww}(W_1))}{E(u^1_w(W_1))}cov\left(r^i_1, W_1\right) \tag{26}$$

[*2] Stain's lemma はあまり知られていないが、とても有用なレンマである。

[*3] 証明は Appendix

よって、資産の期待超過リターンは超過リターンと期末の富の共分散に比例する。マーケットポートフォリオのリターンを $R_1^w \equiv \frac{W_1}{\sum_{i=1}^N q_0^i}$ と定義すると (26) は

$$E(r_1^i) = -\frac{E(u_{ww}^1\left(W_1\right))\sum_{i=1}^N q_0^i}{E(u_w^1\left(W_1\right))} cov\left(r_1^i, R_1^w\right) \tag{27}$$

となり、資産の期待超過リターンは超過リターンとマーケットポートフォリオのリターンの共分散に比例するという CAPM の結果となる。超過リターンとマーケットポートフォリオのリターンが 2 変量正規分布に従うという仮定は (26) を導くための十分条件である。他には、効用関数が 2 次であること等がある。

4 消費選択問題

2 期間モデルで考える。$t = 0$ と $t = 1$

状態空間も離散で $\{1, 2, \cdots, S\}$

１つの商品

1 人の代表的消費者（または投資家）

消費量ベクトルを $C \equiv [c_0, c_1]^T$ とおく。　ここで、c_0 は $t = 0$ における消費量、c_1 は $t = 1$ におけるランダム消費量 $c_1 = [c_{11}, c_{12}, \cdots, c_{1S}]^T$ である。

4.1 Arrow-Debreu Problem

問題 1 (Arrow-Debreu Problem) $\max_C E\left[U(C)\right]$

$s.t.\ c_0 + \pi \cdot c = W$　（予算制約）

$U(C)$ を time-additive で von Neumann-Margenstern の効用関数とすると、$E\left[U(C)\right] = v(c_0) + \sum_{j=1}^S f_j u(c_{1j})$. ここで、$f_j$ は状態 j に推移する実世界での確率。$\mathbf{\Pi} = (\pi_1, \cdots, \pi_S)^T$ は状態価格で、この問題では取引されている Arrow-Debreu 証券の価格である。W は富の総額で初期に与えられているマーケットの価値の総額である。

ラグランジェアンはラグランジェ係数 λ に対して、

$$\mathcal{L} \equiv v(c_0) + \sum_{j=1}^S f_j u(c_{1j}) - \lambda\left(c_0 + \pi \cdot c - W\right) \tag{28}$$

1 階の条件から、

$$v'(c_0^*) - \lambda = 0$$
$$f_j u'(c_{1j}^*) - \lambda \pi_j = 0$$

となる。これより、これより、プライシングカーネル φ は Arrow-Debreu 証券の期待リターンの逆数でマーケットが評価している相対的な貴重である。例えば、経済危機がおこる状態のプライシングカーネル $\frac{\pi}{f}$ は大きいだろう。

$$\varphi_j \equiv \frac{\pi_j}{f_j} = \frac{u'(c_{1j}^*)}{v'(c_0^*)}$$

この問題に対して、ポートフォリオ選択の問題では Arrow-Debreu 証券は直接は取引されておらず、状態価格はシャドウ価格である。取引されているのは N 個の証券である。

4.2 ポートフォリオ選択問題

N つの証券が $t = 1$ におけるペイオフ・マトリックスで与えられている。

$$D = \{D_{ij}\}_{i=1,\cdots N; j=1,\cdots,S}$$

証券価格は $q \in \mathbf{R}^N$ で与えられる。

ポートフォリオは $\theta \in \mathbf{R}^N$ で定義され、ポートフォリオのマーケット価格は $q \cdot \theta$、ペイオフは $D^T\theta \in \mathbf{R}^S$ とかける。

問題 2 $\max_\theta E\left[U(C)\right]$
$s.t.\ c_1 = D^T\theta$ （ポートフォリオのペイオフ）
$c_0 + q \cdot \theta = W$ （予算制約）

ラグランジェアンはラグランジェ係数 λ に対して、

$$\mathcal{L} \equiv v(c_0) + \sum_{j=1}^{S} f_j u(c_{1j}) - \lambda\left(c_0 + q \cdot \theta - W\right) \tag{29}$$

となる。ここで、$q = D\Pi$ となる状態価格 (State price) ベクトル π の存在を仮定すると、(29) は

$$\mathcal{L} \equiv v(c_0) + \sum_{j=1}^{S} f_j u(c_{1j}) - \lambda\left(c_0 + \pi \cdot c_1 - W\right) \tag{30}$$

1 階の条件から、

$$\begin{aligned} v'(c_0^*) - \lambda &= 0 \\ f_j u'(c_{1j}^*) - \lambda\pi_j &= 0 \end{aligned}$$

となる。

$$\pi_j = \frac{u'(c_{1j}^*)}{v'(c_0^*)} f_j$$

消費関数 U の c^* での偏微分 $\partial U(c^*)$ が存在して、$\partial U(c^*) > 0$ であれば、$\pi > 0$

4.3 マーケットの完備性

Arrow-debrew 問題ではすべてのペイオフのパターンは Arrow-debrew 証券のペイオフで張られる。よって、マーケットは完備。ポートフォリオ選択問題ではマーケットが完備である保証はなく、マーケットが完備であるには

$$span(D) = \mathbf{R}^S$$

が必要で、そうでない場合はマーケットは不完備となる。マーケットが完備であれば、Π がユニークにきまる。

マーケットが完備ならいろいろな消費者がいても、1 人の代表的消費者を仮定して問題を解くことができ、その均衡解は等しい。

5 Absence of arbitrage

ここでも上と同様に、2 期間モデルで考える。$t = 0$ と $t = 1$

状態空間も離散で $\{1, 2, \cdots, S\}$

アービトラッジとは $q \cdot \theta \leq 0$ and $D^T\theta > 0$ または、$q \cdot \theta < 0$ and $D^T\theta \geq 0$　となるポートフォリオ $\theta \in \mathbf{R}^N$ である。

5.1 裁定機会 (Arbitrage)

上のポートフォリオ選択問題を考えた場合、アービトラッジとはポートフォリオを変えることにより、$\partial U(c) > 0$ の効用関数を持つ消費者/投資家の効用があがることを意味する。2 つの制約をいれた消費量ベクトルは

$$C = \begin{bmatrix} W \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -q \\ D^T \end{bmatrix} \theta$$

とかける。ポートフォリオを θ から $\theta + \eta$ に替えたとする。消費の変化は

$$\Delta C = \begin{bmatrix} -q \\ D^T \end{bmatrix} \eta$$

アービトラッジとは[*4]

$$\begin{bmatrix} -q \\ D^T \end{bmatrix} \eta > 0 \tag{31}$$

が成り立つことである。(31) はどこかの時間・状態で消費が増えるが、それを相殺する消費の減少が他の時間・状態でないということをいっている。

5.2 Fundamental Theorem of Asset Pricing

定理 3 (Fundamental Theorem of Asset Pricing) 次の 3 つの条件は同値である。

(i) 裁定機会がない (Absence of arbitrage): $(\nexists) \left(\begin{bmatrix} -q\theta \\ D^T\theta \end{bmatrix} > 0 \right)$

(ii) 正の状態価格（positive state price) が存在する。：$(\exists \pi >> 0)\,(q = D\Pi)$

(iii) $\partial U(C) > 0$ (Stricty increasing preference) を持つ消費者は上のポートフォリオ選択問題で最適解を達成している。

証明.

(i)$\Longrightarrow$(ii) Separating Hyperplane Theorem[*5]を使う。次の 2 つの集合を考える

[*4] ベクトルの不等式は

$x \geq y \Leftrightarrow \forall i(x_i \geq y_i)$

$x > y \Leftrightarrow (x \geq y) \& \exists i(x_i > y_i)$

$x >> y \Leftrightarrow \forall i(x_i > y_i)$

としている。

[*5] Appendix を参照

$$S_1 \equiv \left\{ \left[\begin{array}{c} -q\theta \\ D^T\theta \end{array} \right] \in \mathbf{R}^{S+1} \middle| \theta \in \mathbf{R}^N \right\}$$
$$S_2 \equiv \left\{ x \in \mathbf{R}^{S+1} \middle| x > 0 \right\}$$

裁定機会がないという定義から、$S_1 \cap S_2 = \phi$.

Separating Hyperplane Theorem を用いると

$$z \cdot x = 0, \forall x \in S_1 \tag{32}$$
$$z \cdot x > 0, \forall x \in S_2 \tag{33}$$

となる separating hyperplane z が存在することが言える。(33) より、$z >> 0$. z の第 1 成分で基準化して、$(1, \pi)^T = z/z_0 >> 0$ これを (32) に代入して

$$q\theta = \pi \cdot D^T\theta$$

これがどんな θ に対してもなりたつから、

$$q = D\Pi \tag{34}$$

(ii)$\Longrightarrow$(iii) 上述したことから明らか。

(iii)$\Longrightarrow$(i) これも明らか。もし裁定機会があれば、消費を $\Delta C > 0$ だけ変化させると $U(C)$ が増大する。よって、いまの消費は最適解ではない。 ■

5.3 リスク中立確率

状態価格ベクトル Π に対して

$$\pi_0 = \sum_{j=1}^{S} \pi_j$$

をとり

$$\widetilde{\Pi} = \frac{\Pi}{\pi_0}$$

とおくと $\widetilde{\Pi}$ は確率ベクトルとなる。すなわち、$\widetilde{\Pi} >> 0$, $\sum_{j=1}^{S} \widetilde{\pi}_j = 1$ となる。(34) は

$$q_i = \pi_0 D_i \widetilde{\Pi} \tag{35}$$
$$= \pi_0 E^{\mathbf{Q}} [D_i] \tag{36}$$

ここで、π_0 はディスカウントボンドの価格（ディスカウントファクター）である。

6 Recovery Theorem の簡単な数値例

6.1 無裁定プライシング

		state/payoff	
Price	Security	θ_1	θ_2
0.7	Bond	1	1
0.2	Stock	0	1

(Table 1) 証券の価格とペイオフ

将来の状態が θ_1 となる確率や状態が θ_2 となる確率、$P(\theta_1)$ や $P(\theta_2)$ を求めたい。また、今の状態から出発したときの次期の状態の推移確率

$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}$$

を求めたい。ここで、$f_{ij} = \Pr$ (状態 i から状態 j に 1 期で推移する確率)

無裁定の条件から状態価格が存在している。状態価格 (State price) を求める。

$$\begin{cases} 0.7 = 1\pi_1 + 1\pi_2 \\ 0.2 = \qquad\quad 1\pi_2 \end{cases}$$

これより、$\pi = (0.5, 0.2)$

いまの状態に依存した状態価格を求める。Table 1 を今の状態が θ_1 のときのテーブルとしよう。今の状態が θ_2 のときのテーブルは

		state/payoff	
Price	Security	θ_1	θ_2
1	Bond	1	1
0.4	Stock	0	1

(Table 2) 証券の価格とペイオフ（今が θ_2 の場合）

であるとすれば、

$$\begin{cases} 1 = 1\pi_{21} + 1\pi_{22} \\ 0.4 = \qquad\quad 1\pi_{22} \end{cases}$$

これより、$\pi_2 = (\pi_{21}, \pi_{22}) = (0.6, 0.4)$. よって、状態価格マトリックスは

$$\pi = \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{21} & \pi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$$

6.2 均衡条件

1 人の代表消費者/投資家が消費からの期待効用を最大化する。状態が θ_i であるときの今日の消費を c_i とする。明日の状態 θ_j となった場合の明日の消費を c_j とする。今の状態が θ_1 の場合の代表消費者の効用関数を

$$U(c_1, c_j) = u(c_1) + \delta u(c_j)$$

とすれば、期待効用関数 $V(c_1, c_1, c_2)$ は

$$V(c_1, c_1, c_2) \equiv (E\left[U(c_1, c_j)\right] = u(c_1) + f_{11}\delta u(c_1) + f_{12}\delta u(c_2)$$

である。ここで、δ は一定の主観的なディスカウントファクター。代表消費者の期待効用関数最大化の問題は

$$\max_{c=(c_1, c_{11}, c_{12})} u(c_1) + f_{11}\delta u(c_1) + f_{12}\delta u(c_2)$$
$$s.t. \quad c_1 + \pi_{11}c_1 + \pi_{12}c_2 = W_1$$

ここで、W_1 は状態が θ_1 のときの富の総額。ラグランジェはラグランジェ係数を λ とすれば、

$$\mathcal{L} = u(c_1) + f_{11}\delta u(c_1) + f_{12}\delta u(c_2) - \lambda\left(c_1 + \pi_{11}c_1 + \pi_{12}c_2 - W_1\right)$$

とかける。1 階の条件は

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_1} = u'(c_1) - \lambda = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_{11}} = \delta f_{11} u'(c_1) - \lambda \pi_{11} = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_{12}} = \delta f_{12} u'(c_2) - \lambda \pi_{12} = 0$$

ラグランジェ係数 λ を消すと

$$\delta f_{11} u'(c_1) = u'(c_1)\pi_{11}$$
$$\delta f_{12} u'(c_2) = u'(c_1)\pi_{12}$$

同様に、今日の状態が θ_2 の場合の代表消費者の期待効用関数最大化の問題から、

$$\delta f_{21} u'(c_1) = u'(c_2)\pi_{21}$$
$$\delta f_{22} u'(c_2) = u'(c_2)\pi_{22}$$

結局、均衡条件は

$$\begin{cases} \delta f_{11} = \pi_{11} \\ \delta f_{12} \frac{u'(c_2)}{u'(c_1)} = \pi_{12} \\ \delta f_{21} \frac{u'(c_1)}{u'(c_2)} = \pi_{22} \\ \delta f_{22} = \pi_{22} \end{cases} \tag{37}$$

均衡条件を行列表示で表す。

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{u'(c_2)}{u'(c_1)} \end{bmatrix},\ \mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix},\ \pi = \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{21} & \pi_{22} \end{bmatrix}$$

という行列をつかうと (37) は

$$\mathbf{D\Pi} = \delta\mathbf{FD} \tag{38}$$

となる。なぜなら、

$$\mathbf{D}\pi = \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \frac{u'(c_2)}{u'(c_1)}\pi_{21} & \frac{u'(c_2)}{u'(c_1)}\pi_{22} \end{bmatrix},\ \mathbf{FD} = \begin{bmatrix} f_{11} & \frac{u'(c_2)}{u'(c_1)} f_{12} \\ f_{21} & \frac{u'(c_2)}{u'(c_1)} f_{22} \end{bmatrix}$$

(38) から $\mathbf{F}$ について解く。

6.3 固有値問題

ベクトルに実数 δ をかける方が、ベクトルに行列 $\mathbf{A}$ をかけるよりはるかに楽である。固有値問題は

$$\mathbf{Ax} = \delta\mathbf{x} \tag{39}$$

とかける。$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, 固有ベクトルの第 1 成分を 1 として基準化すると、$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix}$. よって、固有値問題はこの場合、

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} = \delta \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} \tag{40}$$

δ と $\begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix}$ がそれぞれ固有値 (Eigenvalue) と固有ベクトル (Eigenvector) であり、(40) の解である。(40) は

$$\begin{cases} 1+x=\delta \\ 1-x=\delta x \end{cases}$$

δ を消すと、

$$x^2+2x-1=0$$

x について解くと

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4+4}}{2}$$

っ以下の応用では、正値にしか興味はないから

$$x=-1+\sqrt{2}$$
$$\delta=\sqrt{2}$$

6.4 実世界の推移確率

$\mathbf{D}$ は対角行列なので、$\mathbf{D}^{-1}$ は簡単に計算できる。

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{u'(c_2)}{u'(c_1)} \end{bmatrix},\ \mathbf{D}^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{u'(c_1)}{u'(c_2)} \end{bmatrix}$$

(38) から $\mathbf{F}$ について解くと、

$$\mathbf{F}=\frac{1}{\delta}\mathbf{D}\pi\mathbf{D}^{-1} \tag{41}$$

$\mathbf{F}$ は確率行列だから、

$$f_{11}+f_{12}=1$$
$$f_{21}+f_{22}=1$$

すなわち、

$$\mathbf{Fe}=\mathbf{e},\ \text{where}\ \mathbf{e}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{42}$$

(41) と (42) より

$$\mathbf{Fe}=\frac{1}{\delta}\mathbf{D\Pi D}^{-1}\mathbf{e}=\mathbf{e}$$

すなわち、

$$\mathbf{\Pi z}=\delta\mathbf{z} \tag{43}$$

ここに、

$$\mathbf{z}=\mathbf{D}^{-1}\mathbf{e}$$

これは (39) の固有値問題である。状態価格の行列 π の固有値は δ、固有ベクトルは $\mathbf{D}^{-1}\mathbf{e}$ である。数値例でみると、

$$\pi=\begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$$

なので、

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} = \delta \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix}$$

これより、

$$\begin{cases} 5 + 2x = \delta \\ 6 + 4x = \delta x \end{cases}$$

$$2x^2 + x - 6 = 0$$

これを解いて、

$$x = \frac{-1 + \sqrt{49}}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\mathbf{D}^{-1}\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}, \ \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

また、固有値 δ は

$$\delta = 5 + 2\frac{3}{2} = 8$$

(41) より

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{44}$$

以上より、

$$f_{11} = \frac{5}{8},\ f_{12} = \frac{3}{8},\ f_{21} = \frac{1}{2},\ f_{22} = \frac{1}{2}$$

マーケットプライス（株式と債券の価格）から実世界の推移確率が回復した (recovered!!)

(43) の固有ベクトル $\mathbf{z} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{e}$ はプライシングカーネルが正値ゆえ、正値をとる。また固有値も主観的なディスカウントファクターなので正値をとる。そうでなくては、(41) より、$\mathbf{F}$ も一部負値になってしまう。数値例では正値となったが、一般的にも Perron-Frobenius 理論から $\mathbf{\Pi}$ が正値行列であれば、$\mathbf{z}$ と δ は、正値が保障される。$\mathbf{\Pi}$ は無裁定から正値行列である。

6.5 条件なし確率 (Unconditional Probabilities)

全確率の公式から

$$P(\theta_1) = P(\theta_1|\theta_1)P(\theta_1) + P(\theta_1|\theta_2)P(\theta_2)$$

上の表記方法では

$$\begin{aligned} f_1 &= f_{11}f_1 + f_{21}f_2 \\ &= f_{11}f_1 + f_{21}(1 - f_1) \end{aligned}$$

よって、

$$f_1\left(1-f_{11}+f_{21}\right)=f_{21}$$

$f_{11}+f_{12}=1$ なので、

$$f_1=\frac{f_{21}}{f_{12}+f_{21}}$$

数値例では、

$$f_1=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{3}{8}}=\frac{4}{7}$$
$$f_2=\frac{3}{7}$$

固有値問題としても解ける。つまり、

$$\begin{cases} f_1=f_{11}f_1+f_{21}f_2 \\ f_2=f_{21}f_1+f_{12}f_2 \end{cases}$$

を行列表示すると

$$\mathbf{F}^T\mathbf{u}=\mathbf{u},\quad \text{where } \mathbf{u}=\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \tag{45}$$

固有値が 1 で固有ベクトルが条件なし確率である。数値例で解こう。(44) より

$$\mathbf{F}^T=\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

(45) は

$$\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{5}{8}+\frac{x}{2}=1 \\ \frac{3}{8}+\frac{x}{2}=x \end{cases}$$

$$x=\frac{3}{4}$$

固有ベクトルを確率ベクトルになるようにリスケールすると

$$f_1=\frac{1}{1+\frac{3}{4}}=\frac{4}{7}$$
$$f_2=\frac{\frac{3}{4}}{1+\frac{3}{4}}=\frac{3}{7}$$

7 Appendix

7.1 Stein's Lemma

補題 4 (Stain's Lemma) X と Y が 2 変量正規分布に従うとき、$g(y)$ がいたるところで 1 階微分可能であれば、

$$Cov(X, g(Y)) = E\left[g'(Y)\right] Cov(X, Y)$$

が成り立つ

証明.

$$\begin{aligned}
Cov(X, g(Y)) &= \int\int xg(y)f(x,y)dxdy - \mu_X E\left(g(Y)\right) \\
&= \int g(y)E(X|y)f(y)dy - \mu_X E\left(g(Y)\right)
\end{aligned}$$

$E(X|y) = \mu_x + \rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \mu_y)$ を () に代入して、

$$\begin{aligned}
Cov(X, g(Y)) &= \rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\int g(y)(y-\mu_y)f(y)dy \\
&= Cov(X, Y)\int g(y)\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y^2}\right)f(y)dy
\end{aligned}$$

$h'(y) \equiv \frac{y-\mu_y}{\sigma_y^2}f(y)$ と定義して部分積分すると

$$Cov(X, g(Y)) = Cov(X, Y)\left[g(\infty)h(\infty) - g(-\infty)h(-\infty) - \int g'(y)h(y)dy\right]$$

ここで、$h(y) = -f(y)$、$f(-\infty) = f(\infty) = 0$ ゆえ、もし $g(y)$ が上と下に有界であれば、つまり

$$\lim_{y\to-\infty} g(y)f(y) = \lim_{y\to\infty} g(y)f(y) = 0$$

ならば、

$$\begin{aligned}
Cov(X, g(Y)) &= Cov(X, Y)\int g'(y)f(y)dy \\
&= E\left[g'(Y)\right] Cov(X, Y)
\end{aligned}$$

■

定理 5 (Separating Hyperplane Theorem) A と B がコンベックスで交わりをもたない $\mathbf{R}^n$ 上のサブセットだとする。そうであるなら、ある Hyperplane $\mathbf{z}$ が存在して

$$z \cdot x \leq z \cdot y, \forall x \in A, \forall y \in B \tag{46}$$

$$z \cdot x < z \cdot y, \forall x \in interior(A), \forall y \in interior(B) \tag{47}$$