OIS ディスカウンティングとデリバティブ理論の再構築

高田勝己*

2013 年 7 月 12 日

1 倒産リスクのないデリバティブのプライシング

1.1 ヘッジポートフォリオを使ったプライシング

- 株式 S のダイナミクスを
$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu(t)dt + \sigma(t)dW(t)$$
とする。
- V を株式 S の途中配当のないヨーロピアンデリバティブとして、
$$V(t) = V(S(t), t)$$
これに Ito's lemma を適用して
$$dV(t) = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S}dS(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2}\sigma(t)^2 S(t)^2 dt \tag{1}$$
- ヘッジポートフォリオを
$$\Pi(t) = V(t) - \frac{\partial V(S,t)}{\partial S}S(t) \tag{2}$$
とすると、このポートフォリオからのゲイン G_Π は
$$dG_\Pi(t) = d\Pi(t) + dD(t) = dV_t - \frac{\partial V_t}{\partial S_t}\left(dS_t + qS_t dt\right) \tag{3}$$
ここで、$q(t)$ は時点 t の株式からの配当率。(1) を (3) に代入して
$$dG_\Pi(t) = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma(t)^2 S(t)^2 dt - \frac{\partial V}{\partial S}q(t)S(t)dt$$
- 確率項がないので、リスクフリーレート r の存在を仮定すると
$$dG_\Pi(t) = r(t)\Pi(t)$$
つまり、
$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma(t)^2 S(t)^2 - \frac{\partial V}{\partial S}q(t)S(t) = r(t)\left(V(t) - \frac{\partial V}{\partial S}S(t)\right)$$
$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\left(r(t) - q(t)\right)S(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma(t)^2 S(t)^2 = r(t)V(t)$$

* 株式会社 Diva Investments, ktakada@divainvest.jp

これを、ファイマンカックの公式から、

$$V(t) = E_t^{\mathbf{Q}} \left(e^{-\int_t^T r(u)du} V(T) \right) \tag{4}$$

ここで、リスク中立測度 $\mathbf{Q}$ で株式は

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = (r(t) - q(t))\, S(t) + \sigma(t) dW^{\mathbf{Q}}(t)$$

に従う。ここで、$W^{\mathbf{Q}}$ はリスク中立測度 $\mathbf{Q}$ でのブラウニアン運動。

- $B_t = e^{\int_0^t r_u du}$ をリスクフリーな Money market account (MMA) とすれば、(4) は

$$\frac{V_t}{B_t} = E_t^{\mathbf{Q}} \left(\frac{V_T}{B_T} \right)$$

とかける。つまり、リスク中立測度 $\mathbf{Q}$ の（唯一の）ニュメレールはリスクフリーの MMA である。また、リスク中立測度のもとで配当の無い証券の期待収益率は (4) から

$$E_t^{\mathbf{Q}} \left(\frac{dV(t)}{V(t)} \right) = r(t)dt$$

とかける。

1.2 キャッシュフローから直接プライシング

リスクフリーレートを r として、Deal Leg だけを考えてプライシングする。

Time	deal leg
t	$-V(t)$
$\vdots$	$\vdots$
u	0
$\vdots$	$\vdots$
T	$V(T)$: payoff

$$V(t) = E_t^{\mathbf{Q}} \left[e^{-\int_t^T r(u)du} V(T) \right]$$

2 完全有担保デリバティブ のプライシング

2.1 完全有担保デリバティブのローカルなキャッシュフロー

株式レポのスキーム

- 時点 t に株式を 1 単位 $S(t)$ で買う
- 購入資金 $S(t)$ を買った株式を担保に出してレポでファンディングする。
- 翌日 $t+dt$ にファンディングの元利合計 $S(t)\left(1+r_{repo}(t)dt\right)$ を返して株式と配当も返却される。
- 株式を $S(t+dt)$ で売る
- よって、時点 $t+dt$ のキャッシュフローは

$$S(t+dt)+q(t)S(t)dt-S(t)\left(1+r_{repo}(t)dt\right)=dS(t)-\left(r_{repo}(t)-q(t)\right)S(t)dt \tag{5}$$

完全有担保デリバティブ

- 時点 t に完全有担保デリバティブを $V(t)$ で買う。
- $V(t)>0$ であれば、カウンターパーティーから $V(t)$ をキャッシュ担保として受け取る。この担保がファンディングとなる。
- 翌日 $t+dt$ に担保の元利合計 $V(t)\left(1+c(t)dt\right)$ をカウンターパーティに返す。ここで、c は担保金利。
- 新しい担保額 $V(t+dt)$ を受け入れる。
- よって、時点 $t+dt$ のキャッシュフローは

$$V(t+dt)-V(t)\left(1+c(t)dt\right)=dV(t)-c(t)V(t)dt \tag{6}$$

- 時点 $t+dt$ ではデリバティブ価値 $V(t+dt)$ に対して同額の担保をもっているので、この時点でお互いコストなしで解約できる。

2.2 ヘッジポートフォリオを使ったプライシング

- (2) のヘッジポートフォリオからのゲインは (5) と (6) から

$$dG_{\Pi}(t)=dV(t)-c(t)V(t)dt-\frac{\partial V_t}{\partial S_t}\left(dS(t)+q(t)S(t)dt-r_{repo}(t)S(t)dt\right) \tag{7}$$

  (1) を使うと

$$dG_{\Pi}(t)=\frac{\partial V}{\partial t}dt-c(t)V(t)dt+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S(t)^2}\sigma(t)^2S(t)^2dt-\frac{\partial V}{\partial S(t)}\left(r_{repo}(t)-q(t)\right)S(t)dt$$

- ポートフォリオゲインは確率項がなく、ポートフォリオは時点 $t+dt$ でコストなしに解約できるから

$$dG_{\Pi}(t)=0$$

  つまり、

$$\frac{\partial V(S,t)}{\partial t}+\frac{\partial V(S,t)}{\partial S}\left(r_{repo}(t)-q(t)\right)S(t)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V(S,t)}{\partial S^2}\sigma(t)^2S(t)^2=c(t)V(t)$$

これを、ファイマンカックの公式から、

$$V(t) = E_t^{\mathbf{Q}}\left(e^{-\int_t^T c(u)du} V(T)\right) \tag{8}$$

- ここで、株式の SDE は

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \left(r_{repo}(t) - q(t)\right) S(t) + \sigma(t) dW^{\mathbf{Q}}(t)$$

- 今度は担保金利による Money market account (MMA) を $B(t) = e^{\int_0^t c(u)du}$ をとすれば、(8) は

$$\frac{V(t)}{B(t)} = E_t^{\mathbf{Q}}\left(\frac{V(T)}{B(T)}\right)$$

  とかける。つまり、リスク中立測度 $\mathbf{Q}$ のニュメレールは担保金利の MMA である。また、リスク中立での配当の無い証券の期待収益率は (8) から

$$E_t^{\mathbf{Q}}\left(\frac{dV(t)}{V(t)}\right) = c(t)dt$$

  とかける。完全有担保デリバティブのプライシングにはリスクフリーレートは必要ない。
- インターバンク市場または CCP での清算では、担保金利はＯＮ金利を使うので、以下では c をＯＮ金利とする。このように解釈すると、(8) がいわゆる”OIS Discounting”である。

2.3 キャッシュフローから直接プライシング

- 次の定理は重要である。

定理 1 配当率 h のあるヨーロピアン型の派生証券価格 V が

$$V(t) = E_t^{\mathbf{Q}}\left[e^{-\int_t^T r(t)du}V(T) + \int_t^T e^{-\int_t^u c(v)dv}h(u)V(u)du\right] \tag{9}$$

と記述できれば、これを V について陽な形でかける。

$$V(t) = E_t^{\mathbf{Q}}\left[e^{-\int_t^T (r(u)-h(u))du}V(T)\right] \tag{10}$$

- 担保金利 c が連続に支払われるとすれば、このデリバティブ取引に係るすべてのキャッシュフローは次のようになる。

time	deal leg	CSA leg	total
t	$-V(t)$	$V(t)$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$u+du$	0	$-c(u)V(u)du + dV(u)$	$-c(u)V(u)du + dV(u)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$T\hat{}\tau$	$V(T\hat{}\tau)$: payoff	$-V(T\hat{}\tau)$: repayment	0

(Table 1) Cashflows from the fully collateralized trade

- ここで、τ と自分と相手の倒産時刻の早い方 (First default time) である。
- 当初の時点 0 では派生証券のプライスを担保によるファンディングでまかなっており、満期時または倒産時では派生証券のペイオフをファンディングの償還金額で賄う。ネット PV はゼロなので、

$$0 = E_t^{\mathbf{Q}}\left[-\int_t^{T\hat{}\tau} e^{-\int_t^u r(v)dv}c(u)du + \int_t^{T\hat{}\tau} e^{-\int_t^u r(v)dv}dV(u)\right] \tag{11}$$

- 右辺第 1 項は担保の CSA で決められた担保にかかる利息の PV、第 2 項は派生証券の価値が変動することによる担保元本の増減の PV である。
- 第 2 項の期待値のなかの項を部分積分すると、

$$\begin{aligned}\int_t^{T\hat{}\tau} e^{-\int_t^u r(v)dv}dV(u) &= \left[e^{-\int_t^u r(v)dv}V(u)\right]_{u=t}^{u=T\hat{}\tau} + \int_t^{T\hat{}\tau} e^{-\int_t^u r(v)dv}r(u)V(u)du \\ &= e^{-\int_t^{T\hat{}\tau} r(v)dv}V(T\hat{}\tau) - V(t) + \int_t^{T\hat{}\tau} e^{-\int_t^u r(v)dv}r(u)V(u)du \end{aligned} \tag{12}$$

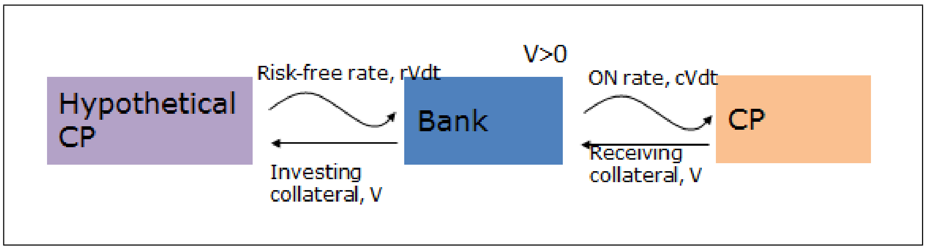
これを使い、(11) を書き直すと、

$$V(t) = E_t^{\mathbf{Q}}\left[e^{-\int_t^{T\hat{}\tau} r(v)dv}V(T\hat{}\tau) + \int_t^{T\hat{}\tau} e^{-\int_t^u r(v)dv}\left(r(u)-c(u)\right)V(u)du\right] \tag{13}$$

$T\hat{}\tau$ は確率変数だが、それでも定理 1 をつかうと、

$$V(t) = E_t^{\mathbf{Q}}\left[e^{-\int_t^{T\hat{}\tau} c(u)du} V(T\hat{}\tau)\right] \tag{14}$$

- (13) は次のことを言っている。



- 倒産による解約時刻 τ を消して、

$$\begin{aligned} V(t) &= E_t^{\mathbf{Q}}\left[e^{-\int_t^T c(u)du} V(T) 1_{\{T<\tau\}}\right] + E_t^{\mathbf{Q}}\left[e^{-\int_t^\tau c(u)du} V(\tau) 1_{\{T\geq\tau\}}\right] \\ &= E_t^{\mathbf{Q}}\left[e^{-\int_t^T c(u)du} V(T) 1_{\{T<\tau\}}\right] + E_t^{\mathbf{Q}}\left[e^{-\int_t^\tau c(u)du} E_\tau^{\mathbf{Q}}\left[e^{-\int_\tau^T c(u)du} V(T)\right] 1_{\{T\geq\tau\}}\right] \\ &= E_t^{\mathbf{Q}}\left[e^{-\int_t^T c(u)du} V(T) 1_{\{T<\tau\}}\right] + E_t^{\mathbf{Q}}\left[e^{-\int_t^T c(u)du} V(T) 1_{\{T\geq\tau\}}\right] \\ &= E_t^{\mathbf{Q}}\left[e^{-\int_t^T c(u)du} V(T)\right] \end{aligned} \tag{15}$$

- リスク中立測度 $\mathbf{Q}$ における V の期待収益率は、配当が $r - c$ であることを考えると

$$\begin{aligned} E^{\mathbf{Q}}\left[\frac{dV(t)}{V(t)}\right] &= [r(t) - (r(t) - c(t))]\, dt \\ &= c(t)dt \end{aligned}$$

よって、V を担保キャッシュフローを考えない場合の配当なしの証券と読み替えて、リスク中立のもとでのその期待収益率を $c \cdot dt$ と考えてもよいことになる。つまり、最初からリスク中立測度 $\mathbf{Q}$ のもとでは、$V(t)e^{-\int_0^t c(u)du}$ が $\mathbf{Q}$-マーチンゲールと考えてもよい。ここでは、特に測度を変換したわけではないことに注意。